ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

XII Сем. **№ 143.** № 11.

НЕ-ЭВКЛИДОВСКІЯ ГЕОМЕТРІИ.

Прим. редакціи. Предполагая, что между читателями В. О. Ф. есть не малое число лицъ, интересующихся системами не-эвклидовскихъ геометрій, мы рѣшаемся помѣстить здѣсь переводъ статьи французскаго математика H. Poincaré, появившейся недавно въ журналѣ „Revue génerale des sciences pures et appliquées (№ 23 отъ 15 Дек. 1891 г.) подъ вышеприведеннымъ заглавіемъ, равно какъ и небольшую полемику, вызванную этою статьею на страницахъ того же журнала.

„Всякое заключеніе предполагаетъ нѣкоторыя основы; эти основы или сами по себѣ очевидны и не требуютъ доказательствъ, или же не могутъ быть установлены помимо другихъ предварительныхъ предложеній; а такъ какъ подобное сведеніе не можетъ быть продолжаемо до безконечности, то всякая дедуктивная наука, и въ частности геометрія, должна основываться на нѣкоторомъ числѣ неподлежащихъ доказательству предложеній — аксіомъ. Поэтому съ изложенія этихъ послѣднихъ и начинаются всѣ курсы геометріи. Но въ числѣ элементарныхъ геометрическихъ аксіомъ есть и такія, которыя представляютъ собою предложенія анализа, а не геометріи, какъ, напр., слѣдующая: „двѣ величины, порознь равныя третьей, равны между собой". Я смотрю на нихъ какъ на сужденія a priori аналитическія, и здѣсь разсматривать ихъ не буду, а остановлюсь на тѣхъ аксіомахъ, которыя спеціально относятся къ геометріи. Большинство руководствъ приводитъ таковыхъ три:

1) Черезъ двѣ точки можетъ проходить только одна прямая.

2) Прямая есть кратчайшій путь отъ одной точки къ другой.

3) Черезъ точку можно провесть только одну прямую, параллельную данной прямой.

Хотя, обыкновенно, вторая изъ указанныхъ аксіомъ не доказывается, однако можно вывести ее какъ слѣдствіе первой, третьей и многихъ другихъ, которыя—какъ ниже будетъ выяснено—принимаются неявно, хотя и не перечисляются.

Долго и напрасно пытались доказать также и третью аксіому, извѣстную подъ именемъ *Эвклидова постулата.* Наконецъ, въ началѣ нашего вѣка и почти одновременно двое ученыхъ, Лобачевскій и Баліэ, неопровержимо установили, что подобное доказательство невозможно.

Однако вопросъ не былъ исчерпанъ. Онъ не замедлилъ сдѣлать крупный шагъ впередъ, благодаря опубликованію знаменитаго мемуара Riemann'a: „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zum Grunde liegen". Это небольшое сочиненіе легло въ основу большинства новѣйшихъ по сему вопросу трудовъ, о которыхъ я буду говорить ниже и между которыми слѣдуетъ отмѣтить работы Бельтрами и фонъ-Гельмгольтца.

Если возможенъ выводъ Эвклидова постулата изъ другихъ его аксіомъ, то, очевидно, мы прійдемъ къ противорѣчащимъ слѣдствіямъ, отрицая этотъ постулатъ и принимая всѣ остальныя аксіомы; слѣдовательно, невозможно было-бы построить связную систему геометріи на такихъ основахъ. Однакожъ это именно и было сдѣлано Лобачевскимъ. Онъ предположилъ, прежде всего, что *„черезъ точку можно провести не одну только, а нѣсколько прямыхъ, параллельныхъ данной"*, а въ остальномъ сохранилъ всѣ прочія Эвклидовы аксіомы. Изъ этихъ допущеній онъ вывелъ, какъ слѣдствіе, цѣлый рядъ теоремъ, въ которыхъ невозможно обнаружить никакихъ противорѣчій, и, такимъ образомъ, построилъ новую геометрію, непогрѣшимая логичность которой ни въ чемъ не уступаетъ логикѣ геометріи Эвклидовой.

Само собою разумѣется, что теоремы этой геометріи вполнѣ отличны отъ тѣхъ, къ которымъ мы привыкли и что, вслѣдствіе этого, онѣ на первыхъ порахъ кажутся намъ оригинальными. Такъ напр., по теоремѣ Лобачевскаго, сумма угловъ треугольника всегда меньше двухъ прямыхъ на величину, пропорціональную площади треугольника; фигуру, подобную данной, но неравную ей по размѣрамъ, построить невозможно; если раздѣлить окружность на n равныхъ частей и въ точкахъ дѣленія провести касательныя къ окружности, то эти касательныя образуютъ многоугольникъ только въ томъ случаѣ, когда радіусъ окружности достаточно малъ; въ противномъ случаѣ онѣ вовсе не будутъ пересѣкаться.

Безполезно увеличивать число этихъ примѣровъ. Предложенія Лобачевскаго не имѣютъ никакой связи съ Эвклидовскими, но, подобно этимъ послѣднимъ, связаны логично одни съ другими.

Отрекшись отъ Эвклидова постулата и первой аксіомы: „*черезъ 2 точки можно провести только одну прямую*", нѣмецкій ученый Риманнъ построилъ новую геометрію на слѣдующихъ основаніяхъ.

Вообразимъ міръ, населенный исключительно существами, лишенными толщины, и предположимъ, что эти „безконечно-плоскія" существа всѣ находятся въ одной плоскости, не имѣя возможности покинуть ея. Допустимъ, что этотъ міръ настолько удаленъ отъ всѣхъ другихъ, что не подверженъ никакому внѣшнему вліянію. Если при этомъ подобныя существа одарены разсудкомъ и способны къ геометрическимъ соображеніямъ, то они, конечно, могли бы приписать пространству только 2 измѣренія. Предположимъ теперь, что эти воображаемыя существа, оставаясь все-таки лишенными толщины, имѣютъ форму сферической фигуры и всѣ находятся на поверхности одной сферы, не имѣя возможности ея оставить. Какую геометрію они могли бы создать? Очевидно, что пространству они не могли бы приписать болѣе 2-хъ измѣреній; роль прямой у нихъ играла бы дуга большого круга обитаемой сферы, какъ кратчайшее разстояніе отъ одной точки ея до другой; — однимъ словомъ, ихъ геометрія была-бы геометріей сферической. Ихъ пространствомъ была бы та поверхность сферы, которой они не могутъ покинуть и въ которой совершаются всѣ доступныя ихъ воспріятію явленія. Слѣдовательно, ихъ пространство было бы *безпредѣльнымъ*, ибо по сферѣ можно вѣчно идти впередъ, не встрѣчая преграды, и въ то же время это пространство было бы *конечнымъ*: нельзя было бы найти ему предѣла, но можно обойти его кругомъ.

Геометрія Риманна есть ничто иное, какъ такая же сферическая геометрія, распространенная до трехъ измѣреній.

Черезъ двѣ данныя точки *вообще* на сферѣ можно провести одинъ большой кругъ (окружность котораго, какъ мы видѣли выше, играла бы для нашихъ воображаемыхъ существъ роль прямой линіи); но есть одно исключеніе: если двѣ данныя точки діаметрально противоположны, то чрезъ нихъ можно провести безчисленное множество большихъ круговъ. Также и въ геометріи Риманна: черезъ двѣ точки проходитъ вообще только одна прямая, но есть случаи исключительные, когда черезъ двѣ точки можетъ проходить безчисленное множество прямыхъ.

Между геометріями Риманна и Лобачевскаго есть нѣкоторая противоположность. Такъ, сумма угловъ треугольника:

равна двумъ прямымъ въ геометріи Эвклида;
меньше двухъ прямыхъ въ геометріи Лобачевскаго;
больше двухъ прямыхъ въ геометріи Риманна.

Число прямыхъ, параллельныхъ данной, которыя можно провесть черезъ данную точку, равно:

единицѣ въ геометрія Эвклида;
нулю въ геометріи Риманна;
безконечности въ геометріи Лобачевскаго.

Прибавимъ, что пространство Риманна хотя *безпредѣльно*, но *конечно*, въ вышепоясненномъ значеніи этихъ двухъ словъ.

Теоремы Лобачевскаго и Риманна не заключаютъ никакого противорѣчія въ себѣ самихъ; но какъ бы ни были многочисленны тѣ слѣдствія, которыя были выведены этими двумя геометрами изъ ихъ допущеній, онѣ не всѣ исчерпаны: авторы должны же были гдѣ-либо остановиться, не имѣя возможности увеличивать число этихъ слѣдствій до безконечности. Такимъ образомъ возникаетъ вопросъ: что же служитъ ручательствомъ, что упомянутые авторы не могли бы прійти къ какому-либо противорѣчащему выводу изъ своихъ гипотезъ, если-бы продолжали свои умозаключенія дальше? Вопросъ этотъ устраняется по отношенію къ геометріи Риманна, если ограничимся въ ней двумя измѣреніями, такъ какъ въ этомъ случаѣ—какъ мы видѣли—она ничѣмъ не отличается отъ сферической геометріи, представляющей собою лишь отдѣльную вѣтвь обыкновенной геометріи и, слѣдовательно, лежащей внѣ всякихъ возраженій. Бельтрами точно также свелъ геометрію Лобачевскаго, ограниченную двумя измѣреніями, къ отдѣлу обыкновенной геометріи, устранивъ такимъ образомъ и по отношенію къ ней всякія возраженія.

Представимъ себѣ, говоритъ Бельтрами, что начерчена нѣкоторая фигура на гибкой и нерастяжимой оболочкѣ, прилегающей къ поверхности такъ, что различныя линіи нашей фигуры могутъ мѣнять свой видъ, не измѣняя своей длины, когда оболочка перемѣщается и изгибается вдоль по поверхности. Въ общемъ случаѣ такая гибкая и нерастяжимая фигура не можетъ перемѣщаться, не выходя изъ поверхности; но есть нѣкоторыя, особаго вида поверхности, для которыхъ это возможно: это поверхности *постоянной кривизны*.

Возвратимся къ сдѣланному ранѣе сравненію и вообразимъ существа безъ толщины, обитающія одну изъ такихъ поверхностей. Они сочтутъ возможнымъ движеніе по поверхности такой фигуры, всѣ линіи которой сохраняютъ неизмѣнную длину. Наоборотъ, такое движеніе казалось-бы абсурдомъ подобнымъ же существамъ, живущимъ на поверхности съ перемѣнною кривизною.

Поверхности постоянной кривизны бываютъ двоякаго рода: однѣ, съ *положительною кривизною*, могутъ быть измѣняемы такъ, чтобы накладываться на поверхность шара, слѣд., геометрія этихъ поверхностей сводится къ геометріи сферической, т. е. къ Римановской; другія — имѣютъ *отрицательную кривизну*; Бельтрами показалъ, что геометрія этихъ поверхностей есть ничто иное, какъ геометрія Лобачевскаго. Такимъ образомъ, геометріи двухъ измѣреній Риманна и Лобачевскаго связаны съ обыкновенной геометріей Эвклида.

Итакъ, вышеприведенное возраженіе устраняется по отношенію къ не-Эвклидовымъ геометріямъ двухъ измѣреній. Оставалось-бы распространить разсужденія Бельтрами на геометр. трехъ измѣ-

реній. Для умовъ, не отказывающихся въ постиженіи четырехмѣрнаго пространства, этоне представляло-бы никакихъ затрудненій, но они не многочисленны, поэтому я предпочитаю избрать здѣсь иной путь.

Примемъ нѣкоторую плоскость за основную и составимъ нѣчто въ родѣ словаря, расположивъ въ два параллельные ряда термины, соотвѣтствующіе другъ другу, подобно однозначущимъ словамъ двухъ различныхъ языковъ:

Пространство.	Часть пространства, расположенная надъ основною плоскостью.
Прямая.	Окружность, пересѣкающая подъ прямымъ угломъ основную плоск.
Плоскость	Сфера, пересѣкающая подъ прямымъ угломъ основную плоскость.
Сфера	Сфера.
Кругъ	Кругъ.
Уголъ	Уголъ.
Разстояніе между двумя точками	Логариѳмъ ангармоническаго отношенія этихъ двухъ точекъ и пересѣченій съ основ. плоск. окружности, проходящей черезъ эти точки и перпендикулярной къ основной плоскости.

И пр.

Затѣмъ переведемъ теоремы Лобачевскаго при помощи такого словаря подобно тому, какъ переводимъ какой-либо текстъ съ одного языка на другой. Тогда *получимъ теоремы обыкновенной геометріи.* Напр., теорема Лобачевскаго: „сумма угловъ треугольника меньше двухъ прямыхъ“ даетъ въ переводѣ: если криволинейный треугольникъ имѣетъ сторонами дуги окружностей, которыя при продолженіи пересѣкаютъ подъ прямымъ угломъ основную плоскость, то сумма его угловъ меньше двухъ прямыхъ.

Такимъ путемъ никогда не прійдемъ къ противорѣчіямъ, какъ-бы далеко мы не зашли въ выводѣ слѣдствій изъ допущеній Лобачевскаго. Въ самомъ дѣлѣ, если бы двѣ какія-либо его теоремы противорѣчили одна другой, то такое же противорѣчіе должно было-бы обнаружиться и въ переводѣ таковыхъ теоремъ при помощи нашего словаря. Но такимъ переводомъ приходимъ къ теоремамъ обыкновенной геометріи, свободной отъ всякихъ противорѣчій. Однако, откуда происходитъ наша увѣренность въ истинности Эвклидовой геометріи и насколько она законна? Это вопросъ, котораго я здѣсь не стану разбирать; онъ относится къ числу интереснѣйшихъ и, по моему мнѣнію, разрѣшимыхъ.

Итакъ, приведенное мною выше возраженіе является вполнѣ устраненнымъ. Но это еще не все. Геометрія Лобачевскаго, поддающаяся конкретному толкованію, — не праздное упражненіе въ

логикѣ и можетъ пріобрѣсть примѣненія; не мѣсто говорить здѣсь о такихъ приложеніяхъ, равно какъ и о пользѣ, которую я извлекъ оттуда для интегрированія линейныхъ уравненій.

Вышеприведенное толкованіе далеко не единственное, и можно было-бы установить нѣсколько словарей, аналогичныхъ указанному, которые давали бы возможность простымъ переводомъ преобразовывать теоремы Лобачевскаго въ теоремы геометріи Эвклида.

Неявныя аксіомы. Представляютъ-ли тѣ аксіомы, которыя излагаются въ опредѣленной формулировкѣ въ нашихъ курсахъ, единственныя основы геометріи? Уже изъ того можно убѣдиться въ противномъ, что, по исключеніи этихъ аксіомъ одной за другою, нѣкоторыя предложенія, общія теоріямъ Эвклида, Лобачевскаго и Риманна, все же остаются въ силѣ. Слѣдовательно, эти предложенія покоятся на такихъ основахъ, которыя принимаются геометрами безъ ихъ особой формулировки. Было-бы очень интересно выдѣлить ихъ изъ классическихъ доказательствъ.

По мнѣнію Стюарта Милля всякое опредѣленіе заключаетъ аксіому, ибо, опредѣляя что-нибудь, мы неявно признаемъ существованіе самого объекта опредѣленія. Но это значитъ идти слишкомъ далеко: въ математикѣ рѣдко случается, чтобы послѣ даннаго опредѣленія не доказывалось существованіе объекта опредѣленія, а если и обходятся безъ подобнаго доказательства, то обыкновенно лишь потому, что самъ читатель легко можетъ пополнить этотъ недостатокъ. Не надо забывать, что слово „существованіе" имѣетъ не одно и то же значеніе въ рѣчи объ объектѣ математическомъ и объектѣ матеріальномъ. Математическій объектъ существуетъ уже при условіи, что его опредѣленіе не заключаетъ противорѣчій ни въ самомъ себѣ, ни съ предварительно установленными предложеніями. Но если утвержденіе Ст. Милля и не можетъ быть примѣнено ко всѣмъ опредѣленіямъ, то все же оно справедливо по отношенію къ нѣкоторымъ изъ нихъ. Плоскость иногда опредѣляется такъ: плоскость это такая поверхность, въ которой прямая, соединяющая двѣ какія-либо ея точки, лежитъ вся. Это опредѣленіе явно скрываетъ въ себѣ новую аксіому; правда, можно было-бы измѣнить его, и это было-бы лучше, но тогда слѣдовало бы высказать аксіому явно.

Другія опредѣленія могутъ привести къ не менѣе важнымъ соображеніямъ. Таково, напр., опредѣленіе равенства двухъ фигуръ: двѣ фигуры равны, когда онѣ совмѣщаются при наложеніи. Чтобы совершить такое наложеніе, надо одну изъ фигуръ перемѣстить до совпаденія съ другою. Но какъ должно выполнить это перемѣщеніе? На такой вопросъ намъ, безъ сомнѣнія, отвѣтили-бы, что перемѣщать должно безъ измѣненія формы, подобно тому, какъ перемѣщаются твердыя тѣла; тогда — circulus vitiosus былъ-бы очевиденъ. Но въ сущности это опредѣленіе ничего не опредѣляетъ. Оно не имѣло бы смысла для существъ, живущихъ въ мірѣ, гдѣ не было-бы другихъ тѣлъ, кромѣ жидкихъ. Если намъ оно кажется яснымъ, то лишь потому, что мы привыкли къ

свойствамъ природныхъ твердыхъ тѣлъ, которыя мало отличаются отъ свойствъ идеальныхъ твердыхъ тѣлъ, всѣ размѣры коихъ неизмѣнны. Однакожъ, какъ бы ни было несовершенно это опредѣленіе, оно неявно заключаетъ аксіому. Возможность движенія неизмѣняемой фигуры еще не очевидна сама по себѣ, или по крайней мѣрѣ она очевидна не болѣе, чѣмъ Эвклидовъ постулатъ, а не какъ аналитическое сужденіе a priori. Къ тому же, изучая опредѣленія и доказательства геометріи, мы вынуждены принять бездоказательно не только возможность такого движенія, но и нѣкоторыя его свойства; это вытекаетъ прежде всего изъ опредѣленія прямой. Много дано неправильныхъ опредѣленій, но истинное — то, которое подразумѣвается во всѣхъ доказательствахъ, включающихъ прямую линію: „Можетъ случиться, что движеніе неизмѣняемой фигуры таково, что всѣ точки линіи, принадлежащія этой фигурѣ, остаются неподвижными въ то время, какъ всѣ точки, лежащія внѣ этой линіи, движутся. Такая линія называется прямой". — Мы съ умысломъ отдѣляемъ въ этой формулировкѣ само опредѣленіе отъ скрывающейся въ немъ аксіомы.

Многія изъ доказательствъ — какъ напр. случаевъ равенства треугольниковъ, возможности опустить перпендикуляръ изъ данной точки на прямую—предполагаютъ такія предложенія, о которыхъ умалчивается при изложеніи, ибо они вынуждаютъ насъ принять, что возможно извѣстнымъ образомъ перемѣщать фигуру въ пространствѣ.

Между неявными аксіомами есть одна, заслуживающая, по моему мнѣнію, нѣкотораго вниманія не только потому, что она возбудила недавнія пренія *), но еще и потому, что, отказавшись отъ нея, можно построить систему *четвертой геометріи*, столь же связную, какъ и системы Эвклида, Лобачевскаго и Риманна.

Чтобы доказать, что всегда можно возставить изъ точки A перпендикуляръ къ прямой AB, разсматриваютъ прямую AC, подвижную около точки A и сперва сливающуюся съ неподвижной прямой AB, а затѣмъ вращаютъ ее около точки A до тѣхъ поръ, пока она не совпадетъ съ продолженіемъ AB. Такимъ образомъ принимается два предложенія: во 1-хъ, что такое вращеніе возможно, и во 2-хъ, что оно можетъ продолжаться до тѣхъ поръ, пока одна изъ двухъ прямыхъ не станетъ продолженіемъ другой. Если принять только первое условіе и отбросить второе, приходимъ къ цѣлому ряду теоремъ, еще болѣе оригинальныхъ, чѣмъ теоремы Лобачевскаго и Риманна, но точно также свободныхъ отъ всякаго противорѣчія, напр.: реальная прямая можетъ быть сама себѣ перпендикулярна.

---

*) Voir MM. Renouvrier, Léchalas, Calinon. Revue Philosophique juin 1889. Critique philosophique, 30 septembre et 30 novembre 1889. Revue Philosophique, 1890, p. 158; voir en particulier la discussion sur le «postulat de perpendicularité». *Прим. автора.*

Число аксіомъ, неявно вводимыхъ въ образцовыя доказательства, больше необходимаго и было-бы желательно свести ихъ къ возможному minimum'у. Прежде всего можно задаться вопросомъ, возможно ли такое сведеніе и не есть ли число необходимыхъ аксіомъ и число воображаемыхъ геометрій безконечно велико. Теорема Софуса Ли (Lie) разрѣшаетъ это сомнѣніе. Ее можно изложить такъ: пріймемъ слѣдующія основныя положенія:

1) *Пространство имѣетъ n измѣреній;*

2) *Движеніе неизмѣняемой фигуры возможно;*

3) *Необходимо p условій для опредѣленія положенія такой фигуры въ пространствѣ,* —

тогда: *число геометрическихъ системъ, совмѣстныхъ съ этими положеніями, будетъ ограничено.* Можно даже, при данномъ n, числу p приписать высшій предѣлъ.

Слѣдовательно, если принимается возможность движенія, то можно изобрѣсть только конечное (и притомъ довольно ограниченное) число геометрій 3-хъ измѣреній. Однакоже этотъ результатъ, повидимому, противорѣчитъ Риману, ибо этотъ ученый создаетъ безчисленное множество различныхъ геометрій, и та, которую обыкновенно называютъ его именемъ, представляетъ лишь одинъ частный случай. „Все зависитъ — говоритъ Риманнъ — отъ способа опредѣленія длины прямой; а такъ какъ такихъ способовъ безчисленное множество, то каждый изъ нихъ можетъ служить исходной точкой новой геометрической системы".

Это вполнѣ вѣрно, но большая часть этихъ опредѣленій не совмѣстна съ движеніемъ неизмѣняемой фигуры, которое въ теоремѣ Ли считается возможнымъ. Поэтому, геометріи Риманна, столь интересныя въ извѣстномъ отношеніи, могутъ быть только чисто аналитическими и непригодны для доказательствъ, аналогичныхъ Эвклидовскимъ"

(Окончаніе слѣдуетъ).

ОСНОВНЫЕ ОПЫТЫ

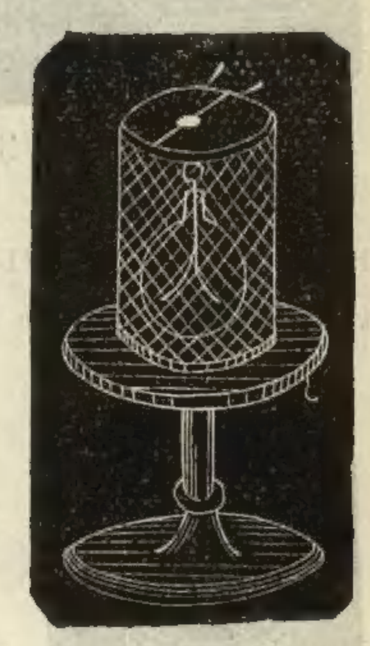
ПО СТАТИЧЕСКОМУ ЭЛЕКТРИЧЕСТВУ.

Во многихъ отдѣлахъ физики и въ особенности въ ученіи объ электричествѣ учебники употребляютъ языкъ и терминологію совершенно отличную отъ той, которая установлена въ наукѣ. Врядъ ли можно оправдать эту своеобразность элементарныхъ учебниковъ какими либо обстоятельствами; научное изложеніе проще, яснѣе и неизмѣримо точнѣе общепринятаго школьнаго. Недостатокъ же математической подготовки учениковъ можетъ быть возмѣщенъ надлежащимъ образомъ подобранными опытами. Ниже я предлагаю рядъ простыхъ, наглядныхъ и легко удаю-

щихся опытовъ *), дающихъ понятіе объ измѣреніи зарядовъ и электрическихъ потенціаловъ.

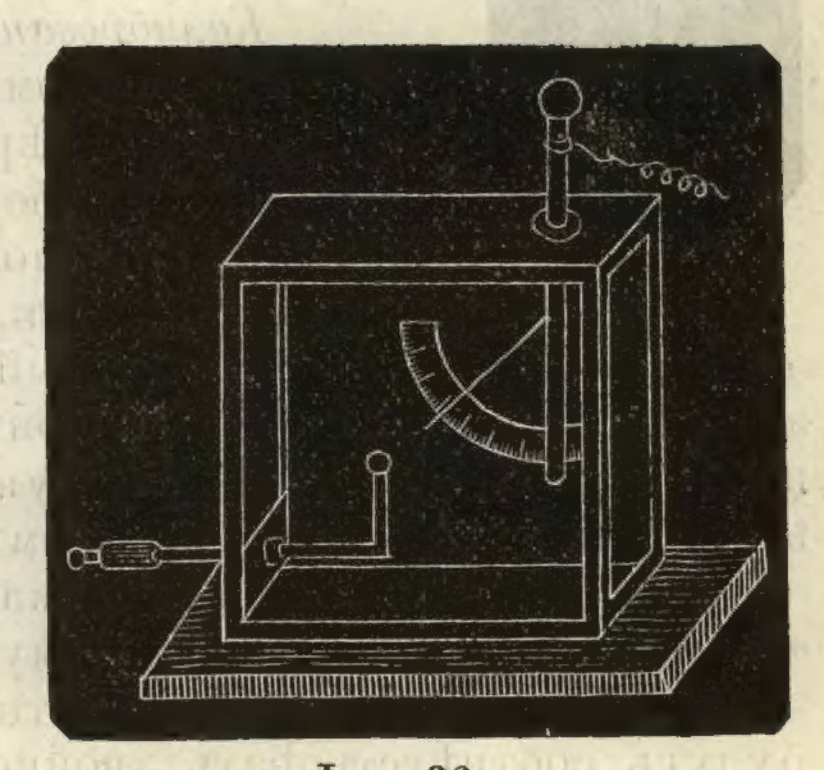
Я предполагаю, что ученикамъ предварительно сообщены уже свѣдѣнія о проводникахъ и непроводникахъ, объ отталкиваніи и притяженіи наэлектризованныхъ тѣлъ, объ электроскопѣ и объ индукціи въ общихъ чертахъ.

1-й Опытъ Фарадея. Цилиндръ изъ проволочной сѣтки ставятъ на изолирующую подставку (деревянный или металлическій столикъ на стеклянной или лучше эбонитовой ножкѣ). Удобно, если цилиндръ закрывается сверху крышкою, которую можно раздвигать помощью эбонитовыхъ ручекъ въ стороны. Вводя внутрь сосуда заряженный электроскопъ, показываютъ, что 1) зарядъ электроскопа не мѣняется при электризованіи сѣтки; сообщивъ электроскопъ проволокою съ сосудомъ, увидимъ, 2) что электроскопъ не обнаруживаетъ совсѣмъ заряда, хотя бы сѣтчатый сосудъ былъ сильно заряженъ. Отсюда выводятъ, что на электризацію проводниковъ, находящихся внутри проводника, внѣшніе заряды не оказываютъ вліянія и что внутри проводника зарядъ можетъ удерживаться только изолировкою.



Фиг. 35.

При дальнѣйшихъ опытахъ удобно пользоваться электрометромъ Кольбе, отличающимся отъ обыкновеннаго электроскопа тѣмъ, что его оболочка сдѣлана изъ жести съ вставленными стекляными дверцами на подобіе фонаря **). Листочекъ аллюминіевый только одинъ и онъ отталкивается отъ неподвижнаго стержня, къ которому привѣшенъ. Для нѣкоторыхъ опытовъ (опредѣленіе знака слабыхъ зарядовъ, при употребленіи электрометра, какъ разряднаго электроскопа и т. п.) черезъ эбонитовую пробку сбоку вставленъ другой электродъ. Углы отклоненія измѣряются при помощи бумажнаго транспортира, наклееннаго на задней зеркальной стѣнкѣ прибора. Наблюдаютъ, черезъ какое дѣленіе транспортира пройдетъ визирная линія, идущая черезъ листокъ и черезъ его изображеніе въ зеркалѣ.

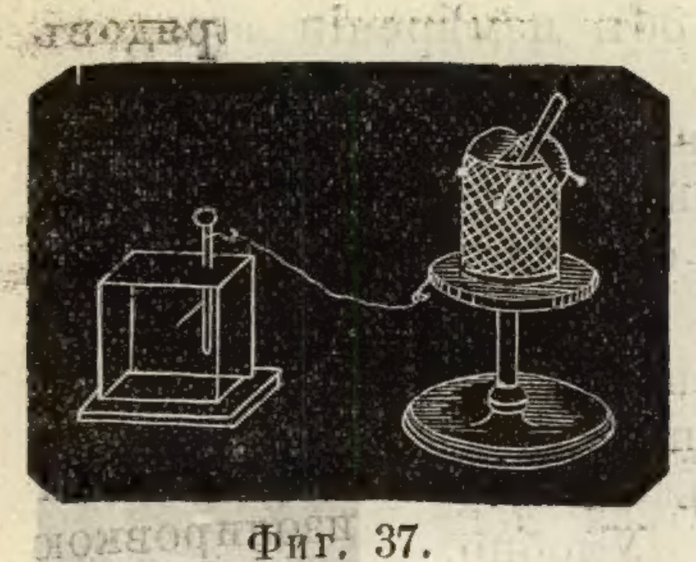


Фиг. 36.

---

*) Демонстрированныхъ мною въ Кіевскомъ Физико-Математическомъ Обществѣ при университетѣ Св. Владиміра.

**) Можно, впрочемъ, пользоваться всякимъ хорошо изолированнымъ электроскопомъ.



Фиг. 37.

2-й опытъ Фарадея. Сосудъ Фарадея, поставленный на изолирующій столикъ, соединяютъ съ шарикомъ электроскопа (фиг. 37). Вводя внутрь сосуда на шелковинкѣ, а еще лучше на эбонитовомъ прутѣ, наэлектризованный шарикъ, или еще лучше два шарика, замѣчаютъ: 1) отклоненіе листочка электрометра, которое не мѣняется отъ передвиженія шарика или же перемѣщенія шариковъ относительно другъ друга; 2) заряды внутренней и внѣшней поверхностей сосуда равны по величинѣ и противоположны по знаку; по величинѣ оба равны заряду шарика. Чтобы убѣдиться въ этомъ, уводятъ внѣшній зарядъ въ землю и осторожно, не касаясь стѣнокъ сосуда, выводятъ шарикъ изъ сосуда. Отклоненіе листочка получается то же, но знакъ заряда будетъ обратный. Отводя и этотъ зарядъ въ землю, вновь вводятъ шарикъ и касаются имъ стѣнки сосуда, тогда *весь* зарядъ шарика (на основаніи 1-го опыта Фарадея) передается сосуду, а отклоненіе получается то же, что и въ первыхъ двухъ случаяхъ.

Фиг. 38.

Калиброваніе электрометра. Электрометръ вмѣстѣ съ сосудомъ Фарадея (фиг. 37) можетъ служить для измѣренія всякихъ зарядовъ. Для калиброванія прибора необходимо имѣть практическую возможность получать неопредѣленное число равныхъ зарядовъ. Всего удобнѣе пользоваться при этомъ электрофоромъ, который въ теченіе нѣсколькихъ часовъ, а при благопріятныхъ обстоятельствахъ и сутокъ, даетъ одинъ и тотъ же зарядъ. Электризуя, при помощи электрофора, шарикъ на эбонитовой ручкѣ и затѣмъ касаясь имъ внутренней поверхности сосуда Фарадея, мы каждый разъ будемъ отдавать сосуду *весь* зарядъ шарика, а потому получаемыя отклоненія листочка электрометра, при многократномъ введеніи шарика въ сосудъ, будутъ соотвѣтствовать двойному, тройному и т. д. зарядамъ шарика. Такъ какъ второй опытъ Фарадея (съ двумя передвигаемыми въ сосудѣ шариками) показываетъ, что отклоненіе листочка электрометра не зависитъ отъ формы тѣла, то отсюда является возможность измѣрять всякіе заряды при помощи такимъ образомъ калиброваннаго прибора.

Опытъ съ шарами. Для повѣрки калибровки заряжаютъ изолированный шаръ и половину его заряда отдаютъ второму такому же шару. Замѣчаютъ отклоненіе, производимое при введеніи перваго шара въ сосудъ Фарадея. Затѣмъ распредѣляютъ зарядъ другого шара между шарами опять поровну и, вводя въ сосудъ, мѣряютъ $^1/_4$, $^1/_8$, $^1/_{16}$ и т. д. первоначальнаго заряда, или

же, если каждый разъ не отнимать заряда отъ сосуда, то $^1/_2 + ^1/_4$, $^1/_2 + ^1/_4 + ^1/_8$ и т. д.

Опытъ съ шарами основанъ на допущеніи, что при передачѣ зарядовъ сумма ихъ не мѣняется. Въ этомъ полезно убѣдиться особо, введя въ сосудъ Фарадея наэлектризованное тѣло и отнимая отъ него зарядъ другимъ тѣломъ, помѣщеннымъ въ сосудѣ же; при этомъ отклоненіе листочка не мѣняется.

Распредѣленіе электричества по поверхности. Для этого опыта удобно взять тѣло неправильной формы (два шара, соединенные вмѣстѣ, или цилиндро-конусъ со впадиной на днѣ). При помощи шарика на эбонитовой ручкѣ касаются разныхъ частей испытуемаго тѣла и вносятъ затѣмъ шарикъ въ сосудъ Фарадея. Послѣ каждаго прикосновенія шарикомъ къ тѣлу, зарядъ послѣдняго убываетъ; поэтому слѣдуетъ каждый разъ заряжать тѣло электрофоромъ наново, зная, что зарядъ, сообщаемый электрофоромъ тѣлу при этомъ будетъ во все время опытовъ одинъ и тотъ же. Продѣлавъ нѣсколько разъ этотъ опытъ, важно показать, что при другихъ зарядахъ законъ распредѣленія плотностей по поверхности не мѣняется.

Законъ электризаціи при треніи. Производя въ сосудѣ Фарадея треніе двухъ изолированныхъ эбонитовыми ручками тѣлъ, легко показать, что заряды ихъ равны, но противоположны по знаку, ибо каждый изъ нихъ порознь производитъ одинаковое отклоненіе листочка электроскопа при помѣщеніи въ сосудъ, а оба они вмѣстѣ не производятъ никакого дѣйствія.

Понятіе объ электрическомъ потенціалѣ. Условились говорить, что два тѣла имѣютъ равные потенціалы, если при соединеніи тонкою проволокою заряды ихъ не мѣняются; потенціалъ одного тѣла называютъ большимъ по абсолютной величинѣ, если оно отдаетъ свой зарядъ другому; передача положительныхъ зарядовъ соотвѣтствуетъ положительному потенціалу, а отрицательнаго заряда — отрицательному потенціалу.

Величину электрическаго потенціала условились измѣрять тѣмъ зарядомъ, который испытуемое тѣло посылаетъ при помощи тонкой проволоки опредѣленному тѣлу, напр. шарику электрометра, предполагая при этомъ, что электрометръ находится внѣ замѣтнаго вліянія испытуемаго тѣла, т. е. или очень удаленъ отъ послѣдняго или же защищенъ со всѣхъ сторонъ соединеннымъ съ землею проводникомъ, сквозь который черезъ изолировку проходитъ проволока, соединяющая электрометръ съ тѣломъ.

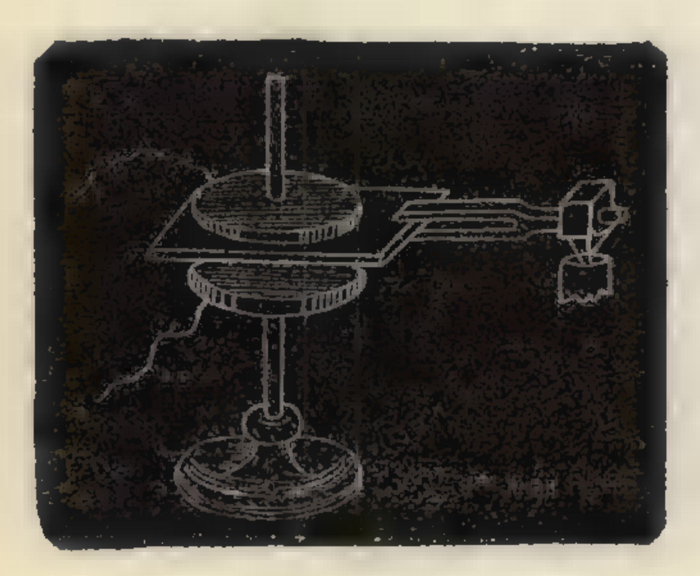
Всѣ части проводника имѣютъ одинъ и тотъ же потенціалъ. Одинъ конецъ проволоки прикрѣпляютъ къ электрометру, а другимъ прикасаются къ разнымъ внѣшнимъ и внутреннимъ точкамъ какого либо тѣла. Отклоненіе листочка электрометра при этомъ не мѣняется.

Зависимость потенціала тѣла отъ его заряда, формы, положенія и отъ присутствія и заряда другихъ тѣлъ, а также отъ среды, окружающей тѣло. Опытъ всего лучше производить, соединивъ изолиро-

ванный столикъ съ электрометромъ и сообщивъ имъ какой либо зарядъ. Съ приближеніемъ другихъ тѣлъ къ столику отклоненіе листочка электрометра мѣняется: уменьшеніе отклоненія покажетъ передачу заряда отъ электрометра къ столику, т. е. паденіе потенціала столика; увеличеніе отклоненія соотвѣтствуетъ увеличенію потенціала. Зависимость потенціала отъ заряда можно показать непосредственно, смѣривъ потенціалъ шара два раза, одинъ разъ съ какимъ либо зарядомъ, а другой разъ съ половиннымъ зарядомъ; отнятіе половины заряда производится другимъ равнымъ первому шаромъ.

Зависимость потенціала отъ формы можно показать, смѣривъ потенціалъ заряженнаго шара, а затѣмъ смѣривъ потенціалъ двухъ соединенныхъ шаровъ, причемъ тотъ-же зарядъ распредѣлится на оба шара.

Зависимость потенціала отъ среды или діэлектрика легко обнаружить, соединивъ наэлектризованный столикъ съ электрометромъ и поставивъ надъ столикомъ поближе проводящій дискъ (деревянный или металлическій) соединенный съ землею (фиг. 39). Введеніе между ними стекляной или эбонитовой пластинки производитъ паденіе потенціала столика; то же паденіе можно произвести и не вводя діэлектрика, приблизивъ верхній дискъ къ столику. Оказывается, что въ случаѣ стекла нужно сблизить диски для такого же паденія потенціала на величину впятеро большую, чѣмъ толщина стекла, т. е. индуктивная способность стекла равна 5.



Фиг. 39.

Для удачнаго выполненія всѣхъ этихъ опытовъ необходимо соблюдать слѣдующія предосторожности:

1. Не производить около наэлектризованныхъ приборовъ рѣзкихъ движеній тѣломъ и руками, ибо это мѣняетъ потенціалъ тѣлъ и производитъ непредвидѣнныя колебанія листочка электрометра. Удобно отгородить себя отъ приборовъ сѣтчатымъ экраномъ, сообщеннымъ съ землею.

2. Слѣдуетъ тщательно заботиться объ изоляціи, такъ чтобы во время опыта не происходило замѣтной потери зарядовъ. Лучше изолировать эбонитомъ, ибо онъ долго не требуетъ никакихъ мѣръ противъ потери; изрѣдка только слѣдуетъ вытирать его тряпкою съ керосиномъ. Стекло необходимо *передъ каждымъ урокомъ* вытирать теплою сухою тряпкою и подогрѣвать на лампѣ, пока не удалится образовавшійся въ началѣ при этомъ слой росы. Полезно покрывать стекляныя ножки шеллакомъ, что, впрочемъ, не избавляетъ отъ необходимости подогрѣвать ихъ передъ урокомъ.

3. Всѣ части изоляторовъ (ручки, ножки и пр.), которыя приходится трогать руками, необходимо обертывать листовымъ

оловомъ во избѣжаніе непредвидѣнныхъ зарядовъ при треніи руками, напримѣръ объ эбонитъ.

При этихъ условіяхъ опыты удаются даже въ сырую погоду.

Удобно также проектировать всѣ эти опыты при помощи сціоптикона на экранъ. *А. Л. Корольковъ.*

Отчеты о засѣданіяхъ ученыхъ обществъ.

Одесское Общество Эл. Мат. и Физики. 11-ое очер. засѣданіе (6 Марта). Предсѣд. И. В. Слешинскій.

1) *К. Ф. Дубисскій:* „Необходимыя модели при преподаваніи стереометріи". Референтъ демонстрировалъ собственноручно заготовленныя имъ многочисленныя модели изъ дерева и стекла, стараясь доказать, что при преподаваніи стереометріи, и въ особенности начальныхъ ея теоремъ, преподавателю необходимо прибѣгать къ помощи моделей.

Сообщеніе вызвало оживленныя пренія.

12-ое очер. засѣданіе. Предс. Н. А. Каминскій *).

1) *Ѳ. Н. Шведовъ:* „Основные опыты электростатики" съ демонстраціей таковыхъ. При этомъ былъ показанъ лекціонный электрометръ референта, основанный на отклоненіи подвѣшеннаго (на подобіе маятника) на шелковинкѣ легкаго кружка, которому можетъ быть сообщенъ электрическій зарядъ. Приборъ этотъ, показанія котораго видны всей аудиторіи, можетъ съ удобствомъ замѣнить крутильные вѣсы Кулона.

2) *В. В. Преображенскій:* „Тригонометрическое рѣшеніе треугольниковъ". Референтъ возстаетъ противъ введенія въ курсы тригонометріи различныхъ лишнихъ формулъ для рѣшенія треугольниковъ, и напоминаетъ, что если имѣемъ въ виду зависимость между сторонами и углами, то основныхъ формулъ для рѣшенія всѣхъ сюда относящихся тригонометрическихъ задачъ можетъ быть только три, за каковыя удобно принять слѣдующія три простѣйшія:

$$\frac{\operatorname{Sin}A}{a} = \frac{\operatorname{Sin}B}{b} = \frac{\operatorname{Sin}C}{c}; \quad A + B + C = 180^{\circ}.$$

Введеніе въ задачу всякой другой величины, какъ напр., высоты, площади, радіусовъ круговъ впис. или опис. и пр. требуетъ присоединенія новой формулы **).

13-ое (и послѣднее) очер. засѣданіе (17 Апрѣля). Предсѣд. И. В. Слешинскій.

1) *К. В. Май:* „Объ извлеченіи корней изъ чиселъ". Референтъ познакомилъ присутствующихъ съ содержаніемъ статьи

---

*) Рефераты обоихъ сообщеній этого засѣданія не были доставлены въ редакцію.

**) См. по этому поводу В. О. Ф. Сем. I, № 6, стр. 138.

С. А. Маркова: „Элементарная теорія извлеченія квадратнаго и кубическаго корня изъ десятичныхъ чиселъ“, помѣщенной въ ноябрской книжкѣ „Педагогическаго Сборника“ за 1891 г., пополнивъ это сообщеніе своими замѣчаніями.

2) *Э. К. Шпачинскій* показалъ на примѣрѣ сокращенный способъ извлеченія корня квадратнаго съ большою точностью *).

3) *Ѳ. Н. Милятицкій*, по случаю постройки въ г. Одессѣ новаго зданія для одной изъ женскихъ гимназій, высказалъ свои соображенія о минимумѣ тѣхъ требованій со стороны преподавателя, какія должны бы быть принимаемы во вниманіе архитекторами при постройкѣ новыхъ учебныхъ зданій **).

Въ заключеніе Предсѣдатель Отдѣленія *И. В. Слешинскій* прочелъ нижеслѣдующій

Краткій отчетъ о дѣятельности засѣданій Отдѣленія Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей по Элементарной Математикѣ и Физикѣ въ 189$^1/_2$ уч. году.

Въ истекшемъ академическомъ году было 13 засѣданій, въ которыхъ выслушано 16 сообщеній и 22 замѣтки. Число референтовъ было 17.

По предметамъ доклады распредѣлялись слѣдующимъ образомъ: по ариѳметикѣ — 1 замѣтка, по алгебрѣ — 4 сообщенія и 3 замѣтки, по геометріи — 4 сообщ. и 6 зам., по тригонометріи — 1 сообщ. и 1 зам., по физикѣ—5 сообщеній и 11 зам. и по исторіи математики — 2 сообщенія.

Больше всего сообщеній посвящено было физикѣ; они касались главнымъ образомъ приборовъ, служащихъ для вывода основныхъ законовъ физики. Сюда относятся сообщенія: Н. А. Каминскаго о приборѣ для повѣрки закона Маріотта, Г. Г. Де-Метца о приборѣ Полуя для опредѣленія механическаго эквивалента теплоты, Ѳ. Н. Шведова объ электрометрѣ, основанномъ на электростатическомъ давленіи и объ основныхъ опытахъ электростатики. Кромѣ того было еще сдѣлано сообщеніе Ѳ. Н. Милятицкимъ о геліостатахъ, и цѣлый рядъ замѣтокъ по различнымъ вопросамъ физики гг. Де-Метцомъ, Завадскимъ, Милятицкимъ, Шведовымъ и Шпачинскимъ.

По геометріи, въ двухъ сообщеніяхъ, С. В. Житковымъ былъ затронутъ весьма важный вопросъ о необходимости отступленія отъ способа преподаванія началъ геометріи, примѣняемаго въ настоящее время. Докладчикъ предложилъ подробную программу своего курса.— Вопросъ о наглядности въ преподаваніи геометріи былъ разсмо-

---

*) См. статью проф. В. П. Ермакова подъ вышеприведеннымъ заглавіемъ въ № 2 «Журн. Эл. Мат.» за 188$^4/_5$ уч. годъ, стр. 30 — 33.

См. также задачу № 305 (2 й серіи) въ № 135 В. О. Ф. стр. 69 — 70.

**) По распоряженію г. Попечителя, соображенія эти напечатаны въ № 7 Циркуляра по Одесскому Учебному Округу, за 1892 г.

тренъ К. Ф. Дубисскимъ въ сообщеніи „о необходимыхъ моделяхъ въ стереометріи". Кромѣ того Д. Н. Зейлигеромъ было сдѣлано сообщеніе о значеніи приборовъ въ геометріи и рядъ замѣтокъ, относящихся къ отдѣльнымъ теоремамъ гг. Гохманомъ, Дубисскимъ, Житковымъ и Коляго.

По алгебрѣ сообщенія касались отдѣльныхъ статей курса. Сюда относятся сообщенія В. В. Преображенскаго о квадратныхъ уравненіяхъ, И. В. Слешинскаго о линейныхъ уравненіяхъ, К. В. Мая объ извлеченіи корней изъ чиселъ и замѣтки гг. Злотчанскаго, Завадскаго, Слешинскаго и др. Кромѣ этихъ докладовъ, А. П. Старковымъ было сдѣлано сообщеніе историческаго содержанія: „исторія алгебраическихъ уравненій по подлиннымъ документамъ".

По тригонометріи было сдѣлано сообщеніе В. В. Преображенскимъ о рѣшеніи треугольниковъ и И. Ю. Тимченко—замѣтка историческаго содержанія.

По ариѳметикѣ была сдѣлана одна лишь замѣтка И. В. Слешинскимъ о правилѣ процентовъ.

Кромѣ всѣхъ этихъ докладовъ, посвященныхъ отдѣльнымъ математическимъ наукамъ, было сдѣлано еще два сообщенія историческаго содержанія, относящихся ко всѣмъ отдѣламъ математики: сообщеніе И. Ю. Тимченко о началахъ математики на основаніи идей Гельмгольца и Риманна и — Х. І. Гохмана — о математикѣ въ талмудѣ.

БИБЛІОГРАФИЧЕСКІЙ ЛИСТОКЪ

НОВѢЙШИХЪ РУССКИХЪ ИЗДАНІЙ.

Д. Агаповъ. Конспектъ и справочная книжка по математикѣ. Вып. 3-й. Геометрія. Оренбургъ. Цѣна 30 к.

А. Виноградовъ. Наставленіе къ географическому черченію. Переяславъ-Залѣсскій.

Н. М. Дементьевъ Справочная книжка фотографическаго ежегодника. Собраніе таблицъ, формулъ, рецептовъ, свѣдѣній изъ фотогр. практики и пр. Спб. Цѣна 60 к., съ перес 75 к

М. Попруженко. Одно изъ метрическихъ свойствъ треугольника (Отд. отт. изъ В. О. Ф.). Одесса. Цѣна 10 к.

Правила и программы реальныхъ училищъ вѣдомства М Н. П. Изд. В. Маврицкаго. Москва. Цѣна 40 к., съ перес 55 к.

Протоколы засѣданій Русскаго Физ.-Хим. Общества. Спб.

С. Рачинскій. 1001 задача для умственнаго счета. Пособіе для учителей сельскихъ школъ. Изд. 2-е, исправл. Москва. Цѣна 30 к.

К. Славнинъ. Сборникъ ариѳм. задачъ. Вып. I. Задачи на числа первой сотни. Пособіе для сельскихъ и другихъ начальныхъ школъ. Екатеринбургъ. Цѣна 15 к.

В. А. Воскресенскій. Педагогическій календарь на 1892—1893 г. (Годъ 3 й). Спб. Цѣна 50 к.

Н. Б. Делоне Алгебраическіе интегралы движенія тяжелаго твердаго тѣла около неподвижной точки. Геометрическое изслѣдованіе. Спб.

Е. Ѳ. Литвинова. Аристотель, его жизнь и значеніе въ исторіи науки. (Жизнь замѣчательныхъ людей. Изд. Ф. Павленкова). Спб. Цѣна 25 к.

Каталогъ библіотеки отдѣленія химіи Русскаго Физ.-Хим. Общества. Спб.

П. А. Некрасовъ. Къ вопросу о рѣшеніи линейной системы уравненій съ большимъ числомъ неизвѣстныхъ посредствомъ последовательныхъ приближеній (Прил. къ 69-му т. Зап. Имп. Ак. Наукъ, № 5). Спб. Цѣна 15 к.

Н. Слугиновъ. Энергія плоскихъ гармоническихъ волнъ. (Отд. отт. изъ В. О. Ф.) Одесса Цѣна 5 к.

Н. Я. Сонинъ. О точномъ опредѣленіи предѣльныхъ величинъ интеграловъ. Спб.

А. И. Федоровъ. Учебникъ химіи для техническихъ училищъ. Кіевъ. Цѣна 1 р. 50 к.

А. Фроловъ. Приложеніе алгебры къ геометріи и начала аналитической геометріи на плоскости. Часть I. Изд 7-е. Спб.

К. Ціолковскій. Аэростатъ металлическій управляемый. Москва. Цѣна 50 коп.

Я. В. Абрамовъ. М. Фарадей, его жизнь и научная дѣятельность. (Жизнь замѣчательныхъ людей, изд. Ф. Павленкова). Спб. Цѣна 25 к.

Извѣстія Имп. Общества Любителей Естеств. и пр. Томъ 78-й, вып. 1. Труды отдѣленія физическихъ наукъ. Томъ 5 й, вып. 1. Москва.

Извѣстія Физико-Матем. Общ. при Казанскомъ унив. 2-я серія. Томъ II. № 1. Казань.

А. Киселевъ. Систем. курсъ ариѳметики. Изд. 5-е. Москва. Цѣна 75 к.

Н. Нечаевъ. Коэффиціентъ пропорціональности въ элементарной физикѣ. Казань.

С. Н. Реформатскій. Конспектъ по органической химіи. Кіевъ.

Д. Сэломонсъ. Домашнее электрическое освѣщеніе и уходъ за аккумуляторами. Перевелъ съ 6-го англ. изданія и дополнилъ Д. Головъ. Спб. Цѣна 1 р. 25 к.

Н. А. Шапошниковъ. Дополненія элементарнаго курса математики и введеніе въ высшій матем. анализъ. Москва. Цѣна 1 р. 20 к.

С. И. Шохоръ-Троцкій. Цѣль и средства преподаванія низшей математики съ точки зрѣнія требованій общаго образованія. Спб. Цѣна 60 к.

ЗАДАЧИ.

№ 350. Извѣстно, что:

во 1-хъ) *произведеніе четырехъ цѣлыхъ послѣдовательныхъ чиселъ, увеличенное единицею, есть полный квадратъ,*

во 2-хъ) *произведеніе четырехъ послѣдовательныхъ нечетныхъ чиселъ, увеличенное 16-ью, есть полный квадратъ.*

Требуется эти двѣ теоремы доказать, обобщить и найти соотвѣтственную зависимость для произведенія четырехъ послѣдовательныхъ членовъ ариѳметической прогрессіи. *Ш.*

№ 351. Изъ двухъ треугольниковъ ABC и MNP съ соотвѣтственно паралельными сторонами, разстоянія между которыми суть m, n, p, одинъ лежитъ внутри другого. Требуется по даннымъ сторонамъ одного изъ нихъ опредѣлить стороны и площадь другого, а также разстоянія между соотв. ихъ вершинами.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 352. Рѣшить уравненіе

$$x^6 + (b\sqrt{x} - \sqrt{x^3})^4 - ax^2 = (b - x)^4 + x^4 - a.$$

(Заимств.) *И. П.*

№ 353. Радіусы трехъ концентрическихъ окружностей относятся какъ $1 : n\sqrt{2} : (n+1)\sqrt{2}$. Опредѣлить стороны прямоугольнаго равнобедреннаго треугольника, у котораго вершина прямого угла лежитъ на первой окружности, а двѣ другія вершины на остальныхъ окружностяхъ. *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ).

№ 354. Показать, что если $6x + 11y$ дѣлится на 31, то и $x + 7y$ тоже раздѣлится. *М. Фридманъ* (Кіевъ).

№ 355. Вписать въ данный треугольникъ другой такъ, чтобы двѣ его стороны проходили черезъ двѣ данныя точки A и B, а третья сторона была параллельна прямой AB.

А. Бобятинскій (Барнаулъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 105 (2 сер.). Рѣшить безъ помощи тригонометріи слѣдующую задачу (Прямол. тригоном. Пржевальскаго).

Угловая высота горы AB въ точкѣ C, находящейся съ B въ одной горизонтальной плоскости, равна 60°. Изъ точки C идутъ къ вершинѣ A по тропинкѣ, составляющей съ горизонтомъ уголъ 30° и, пройдя километръ, останавливаются въ точкѣ D. Найти высоту горы, если $\angle ADC = 135°$.

Уголъ A въ прямоугольномъ треугольникѣ равенъ 30°. Такъ какъ AD и DC—биссекторы угловъ A и C, то точка D — центръ вписаннаго круга и линіи DE и DF, какъ радіусы, равны ($DE \perp BC$, $DF \perp AB$). Но сторона DE, лежащая противъ угла въ 30° въ прямоугольномъ треугольникѣ EDC, котораго гипотенуза = 1 килом., равна $^1/_2$ килом., а $EC = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (сторона треугольника противъ угла въ 60°). Сторона $BC = BE + EC = DF + EC = DE + EC = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Изъ подобныхъ треугольниковъ BAC и DCE имѣемъ: $\frac{DE}{BC} = \frac{EC}{AB}$ или $^1/_2 : \frac{1+\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} : AB$, откуда $AB = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

П. Андреяновъ (Москва), *А. П.* (Пенза), *Г. Ширинкинъ* (Воронежъ), *В. Россовская* (Курскъ), *О. Озаровская* (Тифлисъ), *А Дукельскій* (Кременчугъ р. уч. 7 кл), *М. Акопянцъ* (Тифлисъ 2 г. 7 кл.), *В. Тюнинъ* (Уфа 8 кл.), *К. Щиголевъ* (Курскъ 6 кл.).

№ 121 (2 сер.). Дана окружность и прямая внѣ ея. Изъ центра O на прямую опустимъ перпендикуляръ и, принявъ его основаніе A за центръ, опишемъ окружность, пересѣкающую данную подъ прямымъ угломъ. Пусть эта вторая окружность пере-

сѣкаетъ перпендикуляръ, опущенный изъ центра данной окружности на прямую, въ двухъ точкахъ: M и N (на продолженіи $\perp$). Показать, что всякая третья окружность, проходящая черезъ тѣ-же точки M и N, будетъ пересѣкать данную окружность подъ прямымъ угломъ.

Построеніе. Пусть r — радіусъ данной окружности, d — разстояніе AO, B точка на данной линіи—центръ какой-нибудь окружности, проходящей черезъ точки M и N *), и L — точка пересѣченія этой послѣдней съ данной окружностю, OK—радіусъ данной окружности, касательный ко второй.

Доказательство. Изъ прямоуг. $\triangle$ AOK имѣемъ:

$$AK = AM = AN = \sqrt{AO^2 - OK^2} = \sqrt{d^2 - r^2},$$

а изъ прямоуг. $\triangle$ ABM находимъ:

$$BM^2 = BL^2 = AM^2 + AB^2 = d^2 - r^2 + AB^2;$$

но

$$OB^2 = AO^2 + AB^2 = d^2 + AB^2$$

или, на основаніи предыдущаго:

$$OB^2 = BL^2 + r^2 = LB^2 + OL^2,$$

т. е. треугольникъ OBL прямоугольный при точкѣ L и, значитъ, описанная изъ точки B окружность, пересѣкаетъ данную—подъ прямымъ угломъ, что и требовалось доказать.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ), *И. Бискъ* (Кіевъ 1 гим. 6 кл.), *М. Акопянцъ* (Тифлисъ 2 г. 7 кл.), *К. Щиголевъ* (Курскъ 6 кл.). *О. Озаровская* (Тифлисъ).

№ 134 (2 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$x^{-3}y^3 + 1 = \frac{3700x^{-3}}{x+y};$$

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{(x+y)^2} = \frac{x+y}{250(\sqrt{x}-\sqrt{y})}.$$

Уничтожая знаменатели и отрицательные показатели, получимъ такія уравненія:

$$(x+y)(x^3+y^3) = 3700 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$250(x-y) = (x+y)^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Представивъ (1) въ видѣ:

$$(x+y)^2[(x+y)^2 + 3(x-y)^2] = 14800$$

*) Точка M лежитъ между центромъ O данной окружности и основаніемъ перпендикуляра.

и полагая затѣмъ

$$x + y = z; \quad x - y = u,$$

получимъ:

$$z^2(z^2 + 3u^2) = 14800 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

и

$$250u = z^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Подставивъ изъ (4) уравненія u^2 въ (3) и замѣняя z^2 посредствомъ t, получимъ биквадратное уравненіе:

$$3t^4 + 250^2t^2 - 250^2 . 14800 = 0,$$

откуда опредѣлимъ t, а затѣмъ z, x и y.

Ограничиваясь только раціональными дѣйствительными и мнимыми значеніями, получимъ

$$x = \pm 7; \ \pm 3\sqrt{-1} \text{ и } y = \pm 3; \ \pm 7\sqrt{-1}.$$

С. Ржаницынъ (Троицкъ), *И. Вонсикъ* (Воронежъ), *Я. Тепляковъ* (Радомысль), *М. Павловъ* (Винница 6 к. р. уч.).

№ 153 (2 сер.). Доказать, что основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ какой нибудь вершины треугольника на биссекторы внутреннихъ и внѣшнихъ угловъ при двухъ другихъ вершинахъ, находятся на одной прямой.

Построеніе. Проводимъ изъ вершинъ A и C треугольника ABC внутренніе биссекторы, которые пересѣкутся въ точкѣ D. Пусть F и G — основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ вершины B на биссекторы CD и AD; соединивъ точки F и G и продолживъ прямую FG, проводимъ до пересѣченія съ ней биссекторы CH и AE внѣшнихъ угловъ BCL и BAI даннаго треугольника и соединяемъ точки E и H съ вершиною B.

Доказательство. Такъ какъ точки F и G, основанія перпендикуляровъ BF и BG, лежатъ на одной прямой, то намъ остается доказать, что линіи BE и BH суть перпендикуляры къ биссекторамъ AE и CH.

Замѣтивъ, что линія BD дѣлитъ $\angle ABC$ пополамъ, имѣемъ:

$$\angle BAD + \angle ABD + \angle BCD = d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

изъ прямоугольнаго треугольника ABG имѣемъ:

$$\angle BAD + \angle ABG = d;$$

но

$$\angle ABG = \angle ABD + \angle DBG,$$

слѣдовательно

$$\angle BAD + \angle ABD + \angle DBG = d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

На основаніи уравненій (1) и (2) находимъ:

$$\angle DBG = \angle BCD = \angle ACD.$$

Въ четыреугольникѣ FBGD $\angle FBG + \angle FDG = 2d$, слѣдовательно, около него можно описать окружность и $\angle DBG = \angle GFD$, какъ углы, опирающіеся на одну и ту же дугу; поэтому $\angle GFD$ (GFC) $= \angle ACD$ и линія FG || AC.

Внѣшній уголъ $BCH = \frac{1}{2}\angle BCL = \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ABC$; откуда $\angle BCH + \angle BCD = \angle DCH = \frac{1}{2}BAC + \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle ACB = d$, слѣд. CH || BF; изъ равныхъ же прямоугольныхъ треугольниковъ BFC и FCH найдемъ CH = BF, слѣд. и BH || FC и $\angle BHC = d$, т. е. линія $BH \perp CH$ (биссектору внѣшняго угла BCL треугольника ABC). Такимъ же точно образомъ докажемъ, что линія $BE \perp AE$, биссектору внѣшняго угла BAI и $\angle AEB = d$.

И. Вонсикъ (Воронежъ), *А. Байковъ* (Москва), *П. Архиповъ* (Донск. К. К. 5 к.), *И. Бискъ* (Кіевъ 1 гим. 6 к.), *К. Щиголевъ, М. Цыбульскій* (Курскъ 5 кл.)

№ 155 (2 сер.). Доказать, что половины отрѣзковъ высотъ треугольника, заключенныя между вершинами и общей точкой пересѣченія высотъ (ортоцентромъ), соотвѣтственно равны перпендикулярамъ, опущеннымъ на стороны изъ центра круга, описаннаго около треугольника.

Соединивъ средины сторонъ треугольника ABC, получимъ подобный данному треугольникъ abc (ab || AB, bc || BC, ac || AC). Центръ O круга, описаннаго около треугольника ABC, будетъ ортоцентромъ въ треугольникѣ abc, ибо часть діаметра даннаго круга, перпендикулярная къ срединѣ какой либо стороны треугольника ABC, въ то же время будетъ высотой треугольника abc; соединивъ съ O вершины треугольника abc, получимъ подобные треугольники: $\triangle aob \sim \triangle AO'B$ (O' — ортоцентръ треугольника ABC) $\triangle ocb \sim \triangle O'CB$, $\triangle aoc \sim \triangle AO'C$, откуда находимъ:

$$\frac{ab}{AB} = \frac{ao}{AO'} = \frac{1}{2} \text{ или } ao = \frac{1}{2}AO';$$

$$\frac{ac}{AC} = \frac{oc}{O'C} = \frac{1}{2} \text{ или } oc = \frac{1}{2}O'C;$$

$$\frac{bc}{BC} = \frac{ob}{O'B} = \frac{1}{2} \text{ или } ob = \frac{1}{2}O'B,$$

что и требовалось доказать.

А. П. (Пенза), *А. Байковъ* (Москва), *С. Ржаницынъ, П. Сотниковъ* (Троицкъ), *В. Россовская* (Курскъ), *С. Аржановъ* (Самара), *И. Вонсикъ* (Воронежъ), *И. Бискъ* (Кіевъ), *Н. Щекинъ, П. Писаревъ* (Курскъ 5 кл.), *Я. Я.* (Курск. землем. уч.)

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса 25 Іюля 1892 года.
Типо-литографія Штаба Одесскаго военнаго Округа. Тираспольская, № 14.